価値が変動する2人売り出しのサイレント・ゲーム(モデリングと最適化の理論)

寺岡, 義伸; 北條, 仁志

数理解析研究所講究録
1526巻 2006年 96-101

価値が変動する2人売り出しのサイレント・ゲーム

大阪府立大学　大学院理学系研究科　情報数理科学専攻　寺岡義伸（Yoshinobu Teraoka）
大阪府立大学　大学院理学系研究科　情報数理科学専攻　北條仁志（Hitoshi Hohjo）
Department of Mathematics and Informti0on Sciences
Graduate School of Science, Osaka Prefecture University

Abstract

本報告では、ある農作物や土地の売り出し時刻の選択からヒントを得た、単位正方形上で定義された2人非0和ゲームを提案し解析する。ある市場において米や小豆・大豆のようなある生産物の販売権を複占している競争状態にある2つの企業が、互いにこの生産物の売りに出すタイミングを競っている。この生産物は周期的に収穫されるので、その価値は各期間内において、ある時点までは時間の経過ともに滑らかに増加するが、その時点を過ぎると滑らかに減少し、次の収穫期に前には0となってしまう。さらに、2企業のどちらかが売りに出すと、その価値は不連続的に下落し、その後はまた滑らかに変動する。各企業は、対立企業の売り出し時刻を考慮に入れた上で、自分にとっての最適な売り出し時刻を決めることが目的となる。また、各企業は互いに相手企業が売りに出してもそのことが情報として伝えられず、自分が売りに出したとき、その時点での価値から、相手が未だに売りに出していなかったのか、あるいは既に売っていたのか、知ることが出来るものとする。このゲームの平衡点は各期首での生産物の価値と最大値でのそれとの大小関係の組み合わせで決まってくることがわかる。

1．はじめに

ここで扱う問題は、以下の例で説明するとはっきりする2人非0和ゲームである。

2人のプレーヤ（Player I,II）が、小豆や大豆といった生産物の販売権を複占している。2人のプレーヤの市場占有率は対等であり、互いに競争状態にある。この生産物は周期的に収穫があり、各期の初めに生産されると、2人のプレーヤは同じ割合で販売権を持ち、何時売りに出すのが最適かのタイミングを考えなければならない。次の期に入ると新しい収穫があるので、全プレーヤはこの生産物を各期の終わりまでに売ってしまわなければならない。各期の初めに収穫した生産物の評価額は、ある時点までは時間の経過に伴って滑らかの上昇し、その時点を過ぎると滑らかに減少し、次の収穫期の前には0となってしまう。さらに、2人のどちらかが売りに出さない限り、評価額の変動は滑らかであるが、一方のプレーヤが自分の持分を売りに出すと急激に（不連続的に）評価額は下落し、その後はまた時間の経過に伴った滑らかな変動を続ける。2人のプレーヤは次の収穫期までには、自分の権利を行使しなければならない。2人のプレーヤの各々は、

互いに、その生産物の評価額の変化と、相手の売り出し時刻を考えに入れながら、自分の売り出し時刻を決定しなければならない。

この問題は、農作物の販売のような問題に限らず、土地の売買や大形船舶の発注のような問題にも応用でき、モデルの作り方で、様々な展開が可能となる。

このような問題にあっては、従来型のタイミング・ゲームと同様に、各プレーヤに利用できる情報の様式には二つの型がある。２人の中の一方のプレーヤが自分の持分を売りに出すとその瞬間、そのことが直ちに相手プレーヤに知られてしまう場合、そのプレーヤはノイジー・プレーヤという。逆に、あるプレーヤが売りに出したとき、情報防護がされており、そのことが相手プレーヤには知られず、相手は自分の持分を売りに出したとき初めてその時刻までにそのプレーヤが彼の持分を既に売っていたことを知る場合、そのプレーヤはサイレント・プレーヤと呼んでいる。２人共にサイレント・プレーヤであるようなゲームをサイレント・ゲームといい、２人共にノイジー・プレーヤであるゲームをノイジー・ゲームと呼ぶことにする。また、プレーヤⅠはサイレント・プレーヤであり、逆にプレーヤⅡはノイジー・プレーヤとなっているゲームをサイレント・ノイジー・ゲームと呼ぶことにする。本報告では、このモデルの第一歩として２人サイレント・ゲームに関して定式化し、その解を導く。

２．記号と仮定

問題を見やすくするため、収穫してから評価額が０になるまでの期間を単位区間 [0, 1] で表現する。また、以下のような記号を導入し、後の議論のため、それらに付随した仮定を以下のように設定する。

$v(t)$ ：２人のどのプレーヤもまだ売りに出していないときの、時刻 $t \in [0, 1]$ における生産物の価値。

微分可能であり

$$v'(t)\begin{Bmatrix}\geq \\ <\end{Bmatrix}0 \quad \text{for} \quad \begin{Bmatrix}0 \leq t \leq m \\ m < t \leq 1\end{Bmatrix}$$

を仮定する。

r ：n 人の誰か１人が売り出したとき、売り出す度に生産物の価値が下落する割引率で、

$$0 < r < 1$$

と仮定する。すなわち、誰か１人のプレーヤが売りに出すと、$t \in [0,\ 1]$ での評価額は $v(t)$ から $rv(t)$ へ減少する。

ここで、もし２人のプレーヤが同時に売り出したときは、各プレーヤはその売り出し時点 $t \in [0,1]$ における生産物の評価額 $v(t)$ を、ⅠとⅡ共に受け取る事が出来るものと仮定する。

また、本報告を通じて、単位正方形上で定義された実数値関数 $M_i(x, y)$ に対して、Player Ⅰ と Player Ⅱ がそれぞれ混合戦略（cdf s） $F(x)$ と $G(y)$ を用いたときの期待値に関して、次の記号

$$M_i(F,G)=\int_0^1\int_0^1 M_i(x,y)dF(x)dG(y)$$

および

$$M_i(x,G)=\int_0^1 M_i(x,y)dG(y) \quad ; \quad M_i(F,y)=\int_0^1 M_i(x,y)dF(x)$$

を用いることにする。

3．定式化と解析

本節では、2人のプレーヤが共にサイレント・プレーヤである場合を扱う。すなわち、どのプレーヤも情報防護がしっかりしており、お互いに各時点でそれまでに相手が既に売りに出したのか未だ売りに出していないのかが全くわからず、自分が売りに出したとき、その時点の評価額から初めて相手の行動を知ることが出来る。

このような状況にあっては、Player I の純戦略を $x\in[0,1]$、Player IIの純戦略を $y\in[0,1]$ と定義するのが自然である。そうすると Player i にとっての期待利得 $M_i(x,y)$ は

(1) $$M_1(x,y)=\begin{cases} v(x), & 0\le x\le y \\ rv(x), & y<x\le 1 \end{cases} \quad ;$$

(2) $$M_2(x,y)=\begin{cases} v(y), & 0\le y\le x \\ rv(y), & x<y\le 1 \end{cases}$$

で与えられる。

上記の利得関数と文献[5]を考察すると、$v(x)$ が単峰関数であり $x=m$ （ただし、$0<m\le 1$）で最大値を取ることから、両プレーヤは同じ混合戦略（*cdf*） $F(x)$ を用い、$F(x)$ は次のクラスの *cdf* と想定することが出来る：

区間 $[0,m]$ 内に点 a を選び

(3) $$F(x)=\begin{cases} 0, & 0\le x<a \\ \int_a^x f(t)dt, & a\le x<m \\ 1, & m\le x\le 1 \end{cases}$$

と置く。すなわち、区間（a,m）上の *pdf* $f(x)>0$ のみで構成される *cdf* とする。

そこで、今 Player 1 は純戦略 x を、Player II は(3)で与えられる混合戦略 $F(y)$ を選んだときの Player I への期待利得 $M_1(x,F)$ を計算すると

(4) $$M_1(x,F)=\begin{cases} v(x), & 0\le x<a \\ v(x)[1-(1-r)F(x)], & a\le x<m \\ rv(x), & m\le x\le 1 \end{cases}$$

が得られる。同様にして

(5)
$$M_2(F,y)=\begin{cases} v(y), & 0\le y<a \\ v(y)[1-(1-r)F(y)], & a\le y<m \\ rv(y), & m\le y\le 1 \end{cases}$$

も得られる。

そこで

$$M_2(F,y)=\text{const} \quad \text{for} \quad y\in(a,m)$$

と置くと

$$v'(y)[1-(1-r)F(y)]=(1-r)f(y)v(y)>0, \qquad a<y<m$$

が得られ、従って

(6)
$$F(x)=\{1/(1-r)\}[1-\{c/v(x)\}], \qquad a<x<m$$

が得られる。ここにcは積分定数である。境界条件

$$F(a)=0 \quad ;$$
$$F(m)=1$$

を代入すると

$$c=rv(m)$$

となり、従って

$$v(a)=rv(m)$$

とならなければならないが、この条件は $v(0)\le rv(m)$ が成立する時に限り満足される。

以上の考察から、最初に $v(0)\le rv(m)$ が成立する場合を考察する。

この時、方程式 $v(a)=rv(m)$ を満足する根 a は 区間 $[0, m]$において唯一つ存在する。そこで、この根をa^0と置くと、次のような関係が成立する：

(7)
$$M_2(F,y)=\begin{cases} v(y)<v(a)=rv(m), & 0\le y<a \\ v(a)=rv(m), & a\le y\le m \\ rv(y)<rv(m), & m<y\le 1 \end{cases}$$

(8)
$$M_1(x,F)=\begin{cases} v(x)<v(a)=rv(m), & 0\le x<a \\ v(a)=rv(m), & a\le x\le m \\ rv(x)<rv(m), & m<x\le 1 \end{cases}$$

も成立する。

以上より、定理１を得る。

定理１．いま $v(0) \leq rv(m)$ と仮定し、a^0 を方程式 $v(a)=rv(m)$ の区間［$0,m$］における唯一つの根とする。そこで、次のような cdf で与えられる混合戦略を考える：

$$F^0(x)=\begin{cases} 0, & 0 \leq x < a \\ \{1/(1-r)\}[1-\{v(a^0)/v(x)\}] & a \leq x < m. \\ 1, & m \leq x \leq 1 \end{cases}$$

そうすると n 個の混合戦略の組（F^0，F^0）は (1)と(2)式で与えられる２人非０和サイレント・ゲームの Nash 点を構成する。この時、この戦略に基づく Player i にとっての期待利得は

$$v_1 = M_1(F^0,\ F^0) = rv(m) \quad ; \qquad v_2 = M_2(F^0,\ F^0) = rv(m)$$

となる。

この定理は、２人のプレーヤが共に平衡戦略を用いるとするならば、区間$[m,1]$に於ける $v(x)$ の形が何であっても、両プレーヤとも生産物の評価額が上昇している間に行動を集中させざるを得なくなること、を意味している。

次に、$v(0) > rv(m)$が成立する場合を考察しよう。

我々は、もし ２人のプレーヤが同時刻$t \in [0.1]$に行動したとすると、２人のプレーヤは共にその時点の評価額$v(t)$を得ることになると仮定した。そうすると

(9) $$M_1(x,0) = rv(x) \leq rv(m) < v(0), \quad 0 < x \leq m$$

が成立することになる。また、さらに

(10) $$M_1(0,\ y) = v(0) > rv(m), \quad \text{for any } y \in [0,1]$$

も成立する。全く同様にして

$$M_2(0,\ y) = rv(y) \leq rv(m) < v(0), \quad 0 < y \leq m$$

$$M_2(x,\ 0) = v(0) > rv(m), \quad \text{for any } x \in [0,1]$$

も成立する。以上より定理２を得る。

定理２．いま、$v(0) > rv(m)$ と仮定する。そうすると純戦略（点 0）の対 (0, 0) は (1)式と(2)式で与えられる２人非０和サイレント・ゲームの Nash 平衡点となる。この時、Player iへの平衡値v_i（$i=1,2$）は

$$v_1 = M_1(0,\ 0) = v(0) \quad ; \qquad v_2 = M_2(0,\ 0) = v(0)$$

で与えられる。

この定理は、評価値の最大値がそれほど大きくならないようなら、どのプレーヤも収穫があり次第直ちに売りに出すこと、が良い選択であることを意味する。

5. 今後へ残された問題

本報告では、両プレーヤともサイレント・プレーヤである場合、すなわち、サイレント・ゲームを扱ったが、土地や生産物などの売買にあっては、ノイジー・ゲームの方が現実的かも知れない。また、両プレーヤにとっての情報能力が非対称となるサイレント・ノイジー・ゲームの定式化と解析も、今後の課題となるであろう。

また、割引率 r と定数と仮定したが、t∈経過時刻[0, 1] の関数とした場合への一般化は複雑ではあるが、より現実的であり、興味深い。また、ここでは、1 人が売り出す度に評価額が割引率 r で減少させる仮定を設けたが、売り出した人数分の 1 となる考え方もある。現実の市場がどのように動いているのか、十分な調査が必要。

参考文献

1. M. Dresher, Games of Strategy : Theory and Applications, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1954.
2. S. Karlin, Mathematical Method and Theory in Games, Programming, and Economics, Vol.2, Addison-Wesley, Massachusetts, 1959.
3. Y. Teraoka and Y. Yamada, Games of production development in manufacturing, Lecture Note in Economic and Mathematical Systems 445, Stochastic Modelling in Innovative Manufacturing, Springer, Berlin, 58-67,1997.
4. Y. Teraoka and H. Hohjo, N-person games on territory, Game Theory and Applications, Vol.V, Nova Science Publishers, Inc., New York, 134-141, 2000.
5. Y. Teraoka and H. Hohjo, Two person games of timing on sale, Proceedings of International Workshop on Recent Advances in Stochastic Operations Research, Nanzan University, Nagoya, 281-289, 2005.
6. Y. Teraoka and H. Hohjo, N-person silent game on sale, Scientiae Mathematicae Japonicae, Vol.63, 237-240, 2006.